Leçon 209 - Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

On tente d'approximer des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ pour I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Approximation par des polynômes. —

1. Approximation locale de fonctions régulières. —

- Formule de Taylor-Young : Si f est $n+1$-fois dérivable en un $a \in I$, alors pour $h \to 0$, on a : $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + o(h^{n+1})$.
- Ex : Développements limités en 0 : $exp(x) = \sum_k \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.
  $sin(x) = \sum_k (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$.
- Formule de Taylor avec reste intégral : Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} sur $[a,b]$, on a : $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(f)dt$.
- App : Théorème de Bernstein : Pour $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tq $f^{(2k)} \geq 0$ $\forall k$, alors f est développable en série entière sur $]-a,a[$.

2. Densité dans l'espace des fonctions continues. —

- Def : Partie séparante
- Théorème de Stone-Weierstrass : Pour tout $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, il existe une suite de polynômes P_n convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$
- Exemple.
- **Dev** : Théorème de Weierstrass : Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue on définit $B_n(x) = \sum_k \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}f(\frac{k}{n})$ le n-ième polynôme de Bernstein.
  Alors B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$, et in existe $C > 0$ telle que $\|f - B_n\|_\infty \leq C.w(\frac{1}{\sqrt{n}})$, où $w(h) = sup\{|f(x) - f(y)|, \ |x-y| \leq h\}$ est le module d'uniforme continuité de f.
- App : On a ainsi une suite explicite de polynômes convergeant uniformément vers f et dont on a minoré la vitesse de convergence.
- App : Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue vérifie $\int_0^1 f(t)^n dt = 0$ $\forall n$, alors $f \equiv 0$.
- Contre-exemple de Weierstrass défini sur $\mathbb{R}$ tout entier qui dit que la limite uniforme d'une suite de polynômes sur $\mathbb{R}$ est un polynôme.

3. Densité dans L^2. —

- Def : On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive, telle que $\forall n$ $\int_I |x|^n\rho(x)dq \leq +\infty$.
- Def : On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des classes de fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesue de Lebesgue. Muni de son produit scalaire $\int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$, c'est un espace de Hilbert contenant les fonctions polynômiales.
- Pro : Il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux, vérifiant $\deg(P_n) = n$, que l'on appelle "famille des polynômes orthogonaux associée à ρ". On l'obtient en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(X^n)_n$.
- Thm : S'il existe $a > 0$ tq $\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx \leq +\infty$, alors $(P_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.
- Contre-exemple de (I,ρ) pour lesquels ce n'est pas vrai. (Si $\int_I |x|^n\rho(x)dx \leq (n!)^2$ c'est bon)
- App : Application aux méthodes de Gauss.
- Thm : Théorème sur les méthodes de Gauss.
- Ex : Exemple de Gauss-Tchebychev où tout est explicite.

2. Interpolation polynômiale. —

1. Interpolation de Lagrange. —

- Def : Pour $a_1 < \dots < a_n \in \mathbb{R}$ et $(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$, un polynôme interpolateur de Lagrange des b_i en les a_i est un polynôme P de degré $\leq n$ tel que $P(a_i) = b_i$ $\forall 1 \leq i \leq n$.
- Pro : Il existe toujours un polynôme interpolateur de Lagrange, et il est unique.
- Pro : Formule d'erreur de l'interpolation de $f(a_i)$ en les a_i par rapport à f.
- Rem : Majoration de la formule d'erreur. Remarque sur l'erreur.
- Ex : Interpolation avec des points équidistants.
- Def : Les points d'interpolation de Tchebychev sont les racines des polynômes de Tchebychev.
- Pro : Relation de récurrence liant les points d'interpolation de Tchebychev.
- App : Calcul de l'erreur d'interpolation avec les points de Tchebychev.

2. Convergence uniforme des polynômes d'interpolation. —

- Pro : Cas analytique.
- Contre-exemple avec $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$
- Dessin du phénomène de Runge
- App : Cas où f est Lipschitzienne et où on prend les points de Tchebychev.

3. Application aux formules de quadrature. —

- Rem : Sur un petit intervalle, on approxime f par son polynôme d'interpolation de Lagrange. On obtient alors une méthode de quadrature de l'intégrale de f.
- Pro : Décomposition par Chasles.
- Pro : Points équidistants de la méthode de Newton-Costes.
- Rem : On se ramène à l'intégrale sur $[-1,1]$.
- Lister quelques polynômes d'interpolation, les méthodes de quadrature correspondantes, et leurs ordres et erreurs. (On calcule les erreurs avec Taylor-reste intégral)

3. Approximation de fonctions périodiques. —

On considère $f : \to \mathbb{C}$ T-périodique. Quitte à dilater, on suppose que $T = 2\pi$. On pose $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

1. Polynômes trigonométriques et séries de Fourier. —

- On se place sur $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},\mathbb{C})$, avec $< f,g >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.

- Def : $e_n(x) = e^{in2\pi x}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. C'est une famille orthonormée. On appelle polynôme trigonométrique une combi lin des e_n.
- Def : Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, $c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}dx = < f, e_n >$.
- Rem : Pour $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(x)$, on a $c_n = c_n(P)$.
- Def de $S_N(f)$, la somme partielle de la série de Fourier de f.
- Pro : Si f est de classe C^k, $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$.
- Pro : $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n(x)$ est aussi le projeté orthogonal de f sur Vect(e_n, $-N \leq n \leq N$), qui converge donc dans L^2 vers le projeté orthogonal sur $\overline{Vect(e_n)}$. On a donc une convergence dans L^2 de la série de Fourier de f.
  De plus, $\|f\|_2^2 - \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 = \inf_{g\in P_N} \|f-g\|_2^2$.
- Lemme de Riemann-Lebesgue : $c_n(f) \to_{|n|\to+\infty} 0$.
- App : Inégalité de Bessel : $\sum_n |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2$.
- Pro : $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.

2. *Convergence en moyenne quadratique.* —

- Def : $D_N := \sum_{n=-N}^{N} e_n$,$F_N := \frac{1}{N}.\sum_{n=0}^{N-1} D_n$.
- **Dev** : Théorème de Féjer : La suite des F_N est une approximation de l'unité et $F_N * f = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$ converge uniformément vers f pour tout f $2\pi - périodique$ continue.
- Rem : Si f admet juste une limite à droite et à gauche en tout point, alors $F_N * f(x) \to_N \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ ponctuellement.
- Pro : Les polynômes trigonométriques sont denses dans $C^0(\mathbb{T})$ pour $\|.\|_\infty$, donc denses dans les $L^2(\mathbb{T})$, car $C^0(\mathbb{T})$ y est dense pour la norme $L^2(\mathbb{T})$.
- App : $(e_n)_n$ est donc une famille totale de $L^2(\mathbb{T})$, et donc une base hilbertienne de cet espace.
- Thm : Egalité de Parseval : Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a $\sum_n |c_n(f)|^2 = \|f\|_2$.
- App : Pour f 2π-périodique, paire, telle que $f(x) = \frac{\pi}{4}(\chi_{[0,\pi/2[} - \chi_{]\pi/2,\pi]})$ sur$[0, \pi]$, la formule de Parseval donne : $\sum_k \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. On en déduit $\sum_k \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- App : Pour f 2π-périodique, telle que $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $] - \pi, \pi[$, la formule de Parseval nous donne : $\frac{4}{9} + \sum_{n\geq 1} \frac{8}{((n\pi)^4} = \frac{8}{15}$. On en déduit $\sum_k \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

3. *Convergence uniforme et ponctuelle.* —

- Théorème : Si f est continue, et si $\sum |c_n(f)| < +\infty$, alors $S_N(f)$ converge uniformément vers f.
- Corollaire : Si f est de classe C^1, alors $\sum |c_n(f)| < +\infty$, et $S_N(f)$ CV unif vers f.
- Théorème de convergence ponctuelle : Soit f 2π-périodique et intégrable, qui admet en un x des limites à droite et à gauche.
  Alors $S_N(f)(x)$ converge vers $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.
- Théorème de Dirichlet : Si f est C^0 et C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f. Si f est juste C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers $x \to \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.
- Rem : Il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge.
- App : Pour f 2π-périodique, telle que $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $] - \pi, \pi[$, le théorème de Dirichlet appliqué pour $x = \pi$ nous donne : $0 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$. On en déduit $\sum_k \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- App : Equation de la chaleur sur le cercle : Pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, l'équation différentielle $\partial_t u - \partial_x(\partial_x u) = 0$ sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ admet une unique solution f de classe C^2 telle que $f(t, .) \to_{t\to 0^+} u_0$ dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ de la forme $f(x, t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u).e^{-n^2 t}e^{inx}$.

Références

Gourdon : Formules de Taylor. Contre-ex de Weierstrass. Poly trigonométriques, séries de Fourier. Inégalité de Parseval.Egalité de Parseval. Formule sommatoire de Poisson. Calcul de $\sum_k \frac{1}{k^4}$ et $\sum_k \frac{1}{k^2}$

Demailly : Interpolation de Lagrange, points de Tchebychev. Théorème de Stone-Weierstrass.

Objectif Agrégation : Fonction poids, polynômes orthogonaux, densité des poly orthogonaux, poly de meilleure approximation. Théorème de Féjer (Dev) et applications.

Zuily, Queffélec : Théorème de Weierstrass(Dev).

Faraut : Théorème de Féjer (Dev). Calcul de $\sum_k \frac{1}{k^2}$.

Candelpergher : Equation de la chaleur sur le cercle.

June 10, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes